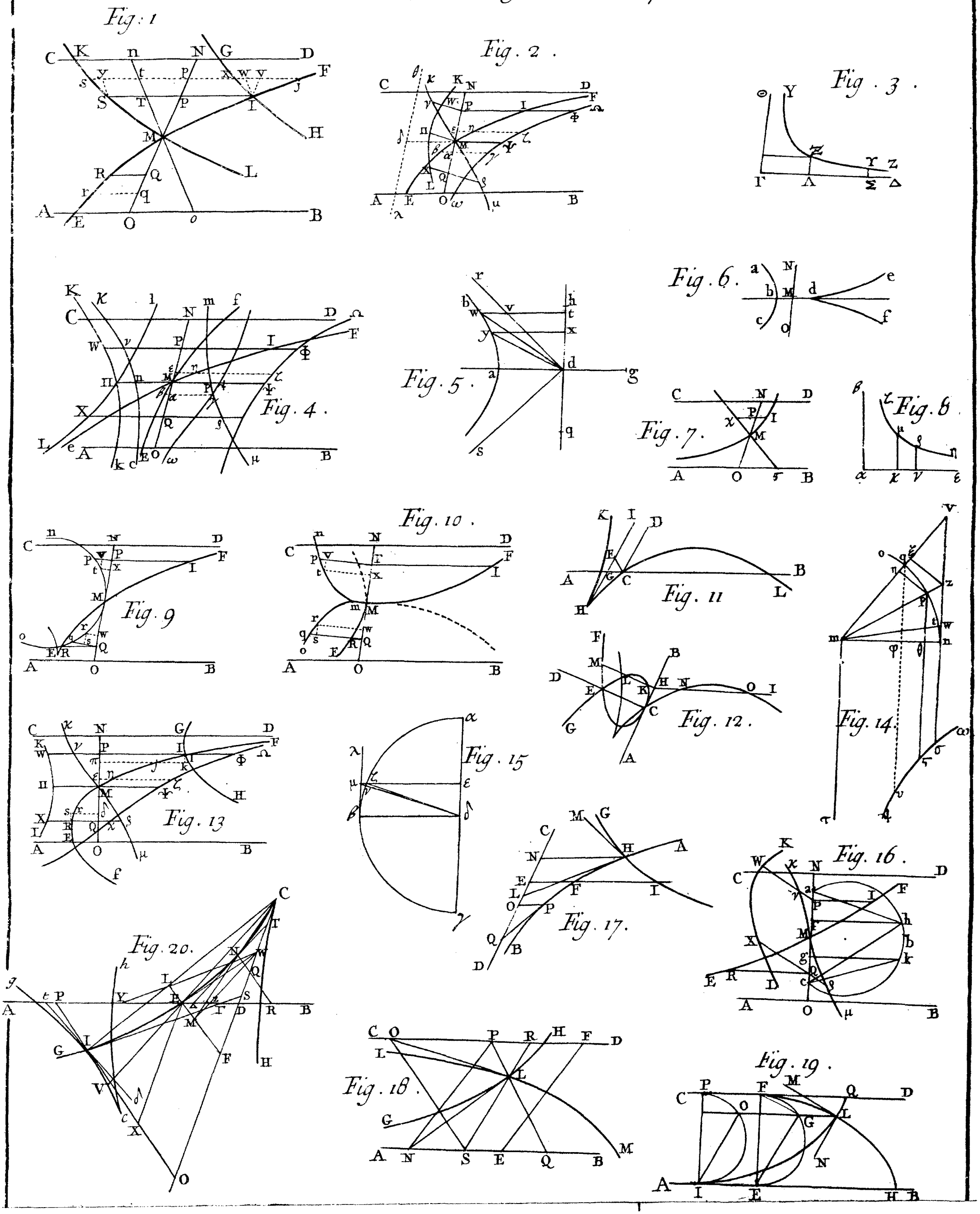

Fig: 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 11
Fig. 12.
Fig. 13
Fig. 14.
Fig. 15
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.

VII. *Solutio Problematis de curvis inveniendis, quæ quadam ratione in ſitu inverſo diſpoſitæ ſe interſecare poſſunt in angulo dato.*

JAM primum ad manus pervenerunt *Acta Eruditorum* ad hunc menſem *Auguſti*, ubi invenio a me peti, ut ea aperiam, quæ notis fictis celata in *Supplementorum ad Acta Eruditorum*, Tom. 8. Sect. 1. edita ſunt. Explicentur autem ea tabulâ ſequenti.

	z	y	x	v	u	t	s	r	qu	p	o	n	m	l	j	i	h	g	f	e	d	c	b	æ	a
b	a	4	o	æ	i z	u	1	s	j	c	8 t	y	9	2	6	e p	3	m	f	7 l	v	w	5	r	h d
g	e	o	u	w	4 d	3	i	c	6	2	s z	7	5	y	æ	m t	1	r	j	9 p	a	h	v	8	f l
n	i	j	æ	5	o l	1	r	s	e	v	6 d	f	a	h	4	y z	w	u	7	9 t	3	8	c	m	2 p
q	o	8	3	u	v p	6	æ	1	c	w	h l	i	5	m	2	j d	f	e	9	a z	4	y	7	s	r t
x	u	y	4	1	c t	f	w	j	2	o	8 p	s	7	r	3	5 l	m	i	h	e d	9	æ	a	6	v z

In hac tabulâ ſex ſunt notarum ordines : ſupremus literas continet, quibus verba celata ſcribi debent, reliqui literas numeroſque continent, quæ verarum literarum loco uſurpantur. Literas autem b, g, n, q, x, quæ e lævâ horum ordinum inferiorum collocantur, propter earum uſum indices appellare licet. Scripturæ pars celata ab horum indicum duobus incipit, quorum poſterior oſtendit notas illum ſequentes in eo ordine, cui præfigitur, quæri oportere, ut veræ literæ cognoſcantur, quæ ſupra has notas in ordine literarum primo

primo ſemper habentur: Ex hoc autem ordine notæ fictæ deſumendæ ſunt, donec alteri alicui indicũm occurritur, quod cum ſit, hoc novo indice utendum eſt ut priori. Et hac regulâ tota ſcriptura explicabitur, niſi quod quandocunque plures indices ſunt contigui, omnes præter ultimum negligi debent: item verborum aperte ſcriptorum interpoſitio hunc indicum uſum non turbat. Hoc modo ſcriptura occulta, ſi pauci errores typographici emendentur, verba ſequentia complecti invenietur.

Curvarum, quæ problemati conveniunt, quæcunque ſumatur ordinata, illius fluxio ſecunda ab ejuſdem fluxione primâ diviſa (ut ſermone arithmeticorum utar) eandem dat quotientem, ſed contrario ſigno, ac fluxio ſecunda a fluxione primâ diviſa ordinatæ ex alterâ principii abſciſſæ parte jacentis, & ad eandem ab eo principio diſtantiam. Hujuſmodi autem curvæ inveniri poſſunt tribus regulis.*

Prima regula curvam, qualem problema requirit, ope ſpatii hyperbolici à curvâ quacunque deducit, quæ habeat ad æquales diſtantias a principio ſuæ abſciſſæ ordinatas æquales, & ab eâdem parte abſciſſæ poſitas. Eſt enim ordinata curvæ quæſitæ, ut area alius curvæ ordinatam habentis æqualem ſegmento aſymptoti hyperbolæ terminato a ſpatio hyperbolico æquali areæ curvæ primo aſſumptæ.

Regula autem ſecunda pendet a primâ, & curvam problemati ſatisfacientem ſine ope ſpatii hyperbolici ex curvis derivat, quæ habeant ad æqualia intervalla a principio ſuæ abſciſſæ ordinatas æquales, ſed a contrariis partibus abſciſſæ poſitas.

* Scilicet, ſi abſciſſa a ſuo principio in oppoſitas partes æqualibus momentis fluit.

Et

Et hæc secunda regula theorema sequens præbet, nimirum, si aliqua curva sumatur, qua problema solvi possit per regulam primam, & si hujus ordinatæ insistunt abscissæ ad perpendiculum, invenietur curva problemati satisfaciens, si ad eandem abscissam construatur alia linea curva, eâ lege, ut illius ordinata ex alterâ parte abscissæ ubique æqualis sit aggregato assumptæ lineæ curvæ & ejusdem ordinatæ; excessui autem hujus curvæ præ ordinatâ suâ æqualis sit unaquæque curvæ construendæ ordinata, quæ ex alterâ parte abscissæ jacet; omnes enim curvæ hac ratione constructæ problemati conveniunt.

Hoc autem theorema demonstratur propositione sequenti, quod in omni triangulo rectangulo quadratum ab alterutro latere angulo recto adjacenti æquale est rectangulo sub summâ alterius lateris angulo recto adjacentis laterisque angulo ei subtendentis, & sub differentiâ eorundem laterum.

Denique tertia regula derivatur a secundâ, ope propositionis nonæ libri de quadraturâ curvarum Neutoni.

SCHOLIUM.

Exemplum generale, quod exhibui, curva logarithmica, & cyclois plurimis modis investigari possunt his regulis.

Unus casus curvæ logarithmicæ commode invenitur per regulam primam, assumptâ lineâ rectâ loco curvæ in illâ regulâ memoratæ.

Alter hujus lineæ casus deducitur ex regulâ secundâ ope speciei quinquagesimæ nonæ linearum tertii ordinis, quæ omnium curvarum in illâ regulâ utilium est fere simplicissima præter parabolam cubicam & hyperbolam conicam.

Cyclois

Cyclois optime invenitur theoremate, quod a regulâ secundâ deduci diximus.

Exemplum istud generale facile invenitur regulâ tertiâ, aliis vero regulis non sine ambagibus.

Regulis secundâ & tertiâ commodissime inveniuntur curvæ geometrice rationales; quæ deducuntur etiam a theoremate in regulam secundam pendente; quandocunque enim curva assumpta tam longitudinem quam ordinatam rationalem habet, cujusmodi simplicissima est parabola semicubica, curvæ quoque inveniendæ ordinata rationalis erit.

Denique his regulis, vel etiam conditione in principio positâ facile est invenire, an curva aliqua proposita problemati satisfaciet, & quibus positionibus id fiet: unde intelligi potest, an eadem curva diversis modis problemati conveniat.

Horum brevem explicationem jam apponam, describendo, ex amici chartâ, problematis sequentis solutionem.

PROBLEMA.

Datis duabus lineis rectis AB, CD (in *Fig.* 1.) parallelis, ad abscissam AB curva EF describenda est, quæ talis sit, ut in situ inverso ad abscissam CD descripta seipsam semper intersecet in angulo quolibet dato.

Ad abscissam CD describantur curvæ GH, KL similes & æquales curvæ EF, quarum altera huic curvæ EF occurrat in puncto quolibet I, altera vero per punctum M transeat, ut partes EM, KM curvarum EF, KL similes sint & æquales; & per punctum M, quod partes curvæ EF dirimit, quæ se mutuo intersecare debent, ducantur lineæ NMO, nMo, quæ cum rectis AB, CD angulos sub NOB & sub CNO, item angulos sub noA, & sub onD constituant ei æquales, in quo curva seipsam secare ponitur. Ducatur IPTS lineis AB, CD paral-

lela; item huic proxima & parallela j x p t s; deinde ducatur I v lineæ N O parallela, & denique I w, S y parallelæ lineæ n o, ut angulus ſub I w j æqualis ſit angulo ſub I v x. Jam anguli ſub I x w & ſub I j v ſimul ſumpti æquales erunt angulo ſub x I M, ideoque & angulo ſub I w v æquales; unde angulus ſub x I w æqualis erit ei ſub I j v; & eodem modo angulus ſub j I v ei ſub I x w æqualis invenietur; adeo ut triangula I j v, x I w ſunt ſimilia, & j v : I v : : I w : w x. Porro pro abſciſſis æqualibus M P, M T ſcribatur z, pro ordinatâ P I, y, & $-v$ pro ordinatâ T S, pertinente ad curvæ K L arcum K M, qui arcui E M curvæ E F reſpondet. Creſcentibus autem abſciſſis M P, M T, & ſimul increſcentibus ordinatis P I, T S, earum fluxiones primæ eadem habebunt ſigna cum ſuis ordinatis, ſed utræque fluxiones ſecundæ idem habebunt ſignum; nam fluxio ſecunda unius ordinatæ idem habebit ſignum cum ſuâ ordinatâ, ſed alterius ordinatæ fluxio ſecunda ſignum habebit a ſigno ſuæ ordinatæ diverſum; propterea quod curvarum K M, M F alterius concavitas verſus convexitatem alterius convertitur, ut manifeſtum eſt. His autem cognitis invenietur j v : I v (= P p) : : $\dot{y} : \dot{z}$, I w (= T t) : w x (= s y) : : $\dot{z} : -\dot{v}$, & $\dot{y} : \dot{z} :: \dot{z} : -\dot{v}$, item $-\dot{y}\dot{v} = \dot{z}^2$, & denique poſitâ $\dot{z}$ invariabili $-\dot{y}\ddot{v} - \ddot{y}\dot{v} = 0$, vel $\dot{y}\ddot{v} + \ddot{y}\dot{v} = 0$, ideoque $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = -\frac{\ddot{v}}{\dot{v}}$, quando y & $\ddot{y}$ ad curvam E F, ſed $\dot{v}$ & $\ddot{v}$ ad curvam K M pertinent. Idem vero locum quoque haber, quando omnes hæ fluxiones ad curvam E F referuntur, ſi abſciſſa in oppoſitas partes a ſuo principio fluere ſtatuitur; nam ſumptâ M Q = M P, & M q = M p, ductiſque Q R, q r ad A B, C D parallelis, puncta R, r in curvâ E F punctis S, s in curvâ K M reſpondent. Ponendo igitur abſciſſam in contra-

contrarias partes a suo principio æqualibus momentis fluere, *Curvarum, quæ problemati conveniunt, quæcunque sumatur ordinata, illius fluxio secunda a fluxione primâ divisa eandem dat quotientem*, &c. ut supra. Hæc autem curvarum quæsitarum conditio est, unde deducuntur regulæ sequentes ad problematis solutionem.

Regula Prima.

CUM requiritur, ut MQ existente = MP sit $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = -\frac{\ddot{v}}{\dot{v}}$, quando abscissa in oppositas partes a puncto M æquabiliter fluit, ita ut ejus fluxioni in partibus abscissæ, quæ a contrariis lateribus puncti M jacent, signa diversa tribuenda sint, ponere licet $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = \dot{z}$ ductæ in quantitatem quamcunque, quæ eadem maneat, & sub eodem signo, pro eâdem magnitudine z, sive illa affirmativa sive negativa sit. Describatur igitur (in *Fig.* 2.) ad abscissam NO curva quælibet KL, cujus ordinatæ angulum quemcunque datum cum abscissâ constituant, & quæ habeat eas ordinatas æquales, &. ab eodem latere abscissæ NO positas, quæ æqualiter distant a puncto M, ut ordinatæ PW, QX; deinde fiat $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$ ordinatæ PW $\times\ \dot{z}$ proportionalis, & $\frac{\ddot{v}}{\dot{v}}$ ordinatæ QX $\times\ \dot{z}$.

Jam (in *Fig.* 3.) exponatur hyperbola YZ ad asymptotos ΓΔ, ΓΘ, angulum sub ΘΓΔ angulo dato sub NPW æqualem comprehendentes, descripta, & in alterutrâ asymptoto, ut ΓΔ, sumatur ad libitum punctum Λ, & ducatur ΛΞ alteri asymptoto ΓΘ parallela, & parallelogrammum ΓΞ compleatur: deinde in curvâ KL ad abscissam NO, & ad punctum M ordinatim

 applicetur

applicetur $M\Pi$; ſumatur ſpatium hyperbolicum $\Lambda\Xi\Upsilon\Sigma$, rectâ $\Sigma\Upsilon$ aſymptoto $\Gamma\Theta$ parallelâ abſciſſum, æquale ſpatio $WPM\Pi$, & fiat $P\Phi = \Gamma\Sigma$, eâque ratione deſcribatur curva $\omega\Psi\Phi\Omega$; dico PI curvæ quæſitæ ordinatam eſſe ut ſpatium $MP\Phi\Psi$. Hoc autem manifeſtum eſt; fluxio enim ſpatii $M\Pi WP$ æqualis eſt fluxioni ſpatii $\Lambda\Xi\Upsilon\Sigma$, ideoque $PW \times \dot{z}$ $=$ fluxioni lineæ $\Gamma\Sigma$ ductæ in $\Sigma\Upsilon$ vel in $\frac{\Gamma\Lambda \times \Lambda\Xi}{\Gamma\Sigma}$; erit igitur $PW \times z$ ut fluxio lineæ $\Gamma\Sigma$ ſive lineæ $P\Phi$ per ipſam $P\Phi$ diviſa; ſed $PW \times \dot{z}$ eſt ut $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$; unde erit $P\Phi \times \dot{z}$ ut $\dot{y}$, & neceſſario y ſive PI ut ſpatium $MP\Phi\Psi$. *Prima* igitur *regula curvam, qualem problema requirit, ope ſpatii hyperbolici,* &c. ut ſupra.

In exemplum hujus regulæ loco curvæ KL (in *Fig.* 2.) ſumatur linea recta lineæ NO parallela, & erit linea $\omega\Psi\Phi\Omega$ ea, quæ logarithmica dicitur, cui NO aſymptotos eſt; ideoque & linea EF etiam logarithmica, per punctum M tranſiens, & aſymptoton habens lineæ NO parallelam; propterea quod area $MP\Phi\Psi$ hic erit ut $P\Phi - M\Psi$ (*a*). Si vero ordinatæ $\varepsilon\eta\zeta$, $\beta\alpha\gamma$ ducantur æqualiter diſtantes a puncto M, ordinatæque $M\Psi$ proximæ, erunt $\varepsilon\eta$, $\alpha\beta$ æquales quando primum naſcuntur, quoniam ſpatia $\varepsilon\zeta\Psi M$, $M\Psi\gamma\alpha$ tunc æqualia ſunt; ex oſtenſis autem eſt $\varepsilon\eta \times \alpha\beta$ $= M\varepsilon q$ vel $M\alpha q$, unde $\varepsilon\eta = M\varepsilon$; & $\varepsilon\eta$ ad $\frac{M\Psi\zeta\eta}{M\Psi}$ ut radius ad ſinum anguli ſub $NM\Psi$. Quoniam igitur PI ſemper eſt ut ſpatium $\Psi MP\Phi$, erit PI ubique ad $\frac{\Psi MP\Phi}{M\Psi}$ ut radius ad ſinum anguli ſub $NM\Psi$; &

(*a*) Vid. Barrov. Lection. Geometr. p. 123.

denique limes ordinatarum negativarum ad ſpatium totum comprehenſum a parte $\Psi\,\omega$ lineæ logarithmicæ $\omega\,\Psi\,\Omega$ ab ordinatâ M Ψ, & ab aſymptoto M O ad ordinatam M Ψ applicatum ut radius ad ſinum anguli ſub N M Ψ : eſt autem rectangulum ſub M Ψ & ſub lineæ logarithmicæ $\omega\,\Psi\,\Omega$ ſubtangente ad ſpatium prædictum etiam ut radius ad ſinum anguli ſub N M Ψ : adeo ut limes ordinatarum negativarum lineæ curvæ E F æqualis erit huic ſubtangenti ; unde ſi Ψ M retro producatur ad δ, ut M δ huic ſubtangenti ſit æqualis, & ducatur $\theta\,\delta\,\lambda$ lineæ N O parallela, erit illa curvæ E F aſymptotos ; erit autem curvæ hujus E F ſubtangens lineæ M δ æqualis ; propterea quod M ε = eſt $\varepsilon\,\nu$. *Unus igitur caſus curvæ logarithmicæ commode invenitur per regulam primam*, &c. ut ſupra.

Hæc autem regula primum oſtendit modum, quo problema ſolvitur.

Regula Secunda.

Deſcribatur curva quæcunque $\varkappa$ M μ per punctum M tranſiens in *Fig*. 2. vel $\varkappa$ n c, m p μ in *Fig*. 4. ubi curva invenienda duobus cruribus e M F, E M f conſtat ; ut curvarum $\varkappa$ M μ, & $\varkappa$ n c, m p μ ordinatæ ut P ν, Q ρ, quæ æqualiter a puncto M principio abſciſſæ diſtant, ſint æquales, ſed a contrariis partibus abſciſſæ poſitæ, ita ut mutato abſciſſæ ſigno ordinatæ ſignum etiam mutetur.

Exponatur porro (in *Fig*. 5.) hyperbola æquilatera a b cujus axis tranſverſus a g, conjugatus h q, centrum d, aſymptoti d r, d s ; ſumatur d t = P ν, & ducatur t v w ad h q perpendicularis, junctâ d w, ſumatur quoque d x = M n, & ducatur x y item rectæ lineæ h q perpendicularis, junctâ d y. Jam ſit curva K L (in *Fig*. 2.) vel K k L l (in *Fig*. 4.) talis ut ſpatium

Π M P W

ΠMPW æquale ſit ſpatio a d w, ſi curva $\varkappa\,\mu$ per punctum M tranſit, aliter æquale ſpatio d a w — d a y; hac enim ratione curvæ K L, & K k L l non deſinent conditionem habere, quæ in regulâ priori requiritur, nempe ut ordinatæ ad æquales diſtantias a puncto M ſint æquales, & ab eâdem abſciſſæ parte poſitæ. Nam area hyperbolica a d w affirmativa eſt, quando d t vel P ν eſt affirmativa, & eadem area negativa eſt, quando d t vel Pν negativa eſt, quia area tota hyperbolica ab eâdem parte lineæ h q jacet; ideoque area curvarum K L, K k L l ad ordinatam M Π terminata ſignum ſuum mutabit, quando abſciſſa M P, magnitudine ſervatâ, ſignum mutat; & curvæ ordinata nec magnitudinem nec ſignum mutabit, mutatione ſigni abſciſſæ. Sit porro ' a d q = parallelogrammo Γ Ξ in hyperbolâ priori: quo efficietur ut t w + t v ſit ad a d ut Γ Σ ad Γ Λ (*a*); ſi igitur ΓΛ fiat = a d, erit t w + t v = Γ Σ = P Φ. Porro ducantur ordinatæ $\varepsilon\,\eta\,\zeta$, $\alpha\,\beta\,\gamma$ ordinatæ M Ψ proximæ; deinde in *Fig*. 2. ubi curva ω Ψ Ω ſimplex eſt, cum $\varepsilon\,\eta$ ſit ad $\alpha\,\beta$ ut ſpatium M Ψ $\zeta\,\varepsilon$ ad ſpatium M Ψ $\gamma\,\alpha$, erit $\varepsilon\,\eta = \alpha\,\beta$; unde & earum utraque = M ε = M α. Ideoque $\varepsilon\,\eta$ ad $\frac{M\Psi\zeta\varepsilon}{M\Psi}$ ut radius ad ſinum anguli ſub N M Ψ, & ubique

P I ad $\frac{M\Psi\Phi P}{M\Psi}$ in eâdem ratione. In *figurâ quartâ* ubi curva $\omega\,\psi\,\Psi\,\Omega$ ex duobus cruribus compoſita eſt, $\varepsilon\,\eta$ eſt ad $\alpha\,\beta$ ut ſpatium Ψ M $\varepsilon\,\zeta$ ad ſpatium ψ M $\alpha\,\gamma$ ſive ut M Ψ ad M ψ, propterea quod M ε = eſt M α. Cum igitur neceſſe ſit, ut $\varepsilon\,\eta \times \alpha\,\beta$ = ſit M $\varepsilon\,q$, ſcilicet ut crura M F, M E in angulo propoſito ſe mutuo interſecent, erit ratio $\varepsilon\,\eta$ ad M ε ſubduplicata rationis $\varepsilon\,\eta$ ad $\alpha\,\beta$ vel ſubduplicata rationis M Ψ ad M ψ:

(*a*) Vid. Philoſ. Tranſact. No. 338. prop. 4.

ideoque

ideoque $\epsilon\varkappa$ ad ſpatium $M\Psi\zeta\epsilon$ applicatum ad mediam proportionalem inter $M\Psi$, $M\psi$ ut radius ad ſinum anguli ſub $NM\Psi$; & generatim PI ad ſpatium $M\Psi\Phi P$ applicatum ad mediam proportionalem inter $M\Psi$ & $M\psi$ in eâdem ratione. Eſt autem $M\Psi = yx + dx$, & $M\psi = yx - dx$, & ad media eſt proportionalis inter $yx + dx$ & $yx - dx$. Unde utrobique dictis ad, a; dt vel $P\nu$, R;

erit $P\Phi = \sqrt{aa + RR} + R$; $R = \frac{1}{2} a \times \overline{\frac{P\Phi}{a} - \frac{a}{\Phi P}}$;

& PI ad $\frac{MP\Phi\Psi}{a}$ ut radius ad ſinum anguli ſub $NM\Psi$.

Regula igitur *ſecunda pendet a primâ, & curvam problemati ſatisfacientem ſine ope ſpatii hyperbolici,* &c. ut ſupra. Nam hic ſine ſpatio hyperbolico curva invenitur, cujus quadraturâ problema ſolvitur.

Duæ autem ſunt in hac regulâ formulæ. Formula prior nimirum $P\Phi = \sqrt{aa + RR} + R$, curvarum geometrice rationalium, quæ maxime hic requiruntur, inventioni accommodatur; facile enim eſt ita ſumere quantitatem indeterminatam R, ut curva $\omega\Psi\Phi\Omega$ quadraturam admittat.

Ne caſus magis compoſiti memorentur, ponatur R vel $P\nu = cz^{\frac{m}{n}}$, ut m & n numeri ſint impares vel inter ſe primi, vel eorum alter unitas: hac enim ratione curva, cujus ordinata eſt $P\nu$, conditionem habebit in hac regulâ neceſſariam, & erit $P\Phi = \sqrt{aa + RR}$

$+ R = \sqrt{aa + ccz^{\frac{2m}{n}}} + cz^{\frac{m}{n}} = z^{\frac{m}{n}} \sqrt{cc + aaz^{\frac{-2m}{n}}}$

$+ cz^{\frac{m}{n}}$. Si igitur $\frac{m}{n} + 1$ ſit vel numero $\frac{-2m}{n}$ æqualis, vel ejuſdem multiplex, id eſt, ſi ſumatur $m =$

$- 1$,

— 1, & n numero cuilibet impari æqualis; pars ordinatæ $z^{\frac{m}{n}}\sqrt{cc + aaz^{\frac{-2m}{n}}} + cz^{\frac{m}{n}}$ ſub vinculo incluſa, ideoque & ordinata tota quadraturam admittet. (a)

Verbi causâ, ponatur $\frac{m}{n} = -\frac{1}{3}$, $c = 1$, & P Φ $= z^{-\frac{1}{3}}\sqrt{1 + aaz^{\frac{2}{3}}} + z^{-\frac{1}{3}}$. Unde erit area M Ψ Φ P $= \frac{\overline{1 + aaz^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{3}{2}}}{aa} + \frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}$, & P I $= \overline{\frac{1}{aa} + z^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{3}{2}} + \frac{3z^{\frac{2}{3}}}{2a}$, curvaque quæſita hac æquatione comprehendetur $a \times$ P I $q - 3z^{\frac{2}{3}} \times$ P I $= \frac{1}{a^5} + \frac{3z^{\frac{2}{3}}}{a^3} + \frac{3z^{\frac{4}{3}}}{4a} + a z^2$. In hac æquatione cum $z^{\frac{2}{3}}$ ſignum non mutabit, mutatione ſigni abſciſſæ z; pro eâdem ipſius magnitudine tam negativâ quam affirmativâ P I eandem habebit magnitudinem, & ſub eodem ſigno; unicuique autem magnitudini abſciſſæ z reſpondet & affirmativa & negativa ordinata: adeo ut curva quæſita habebit formam hic appoſitam (in *Fig*. 6.); e tribus conſtans cruribus a b c, d e, d f punctis b, d æqualiter a puncto M diſtantibus; quippe eſt M d = M b $= \frac{1}{a^3}$: quando enim eſt $z = 0$, erit P I $q = \frac{1}{a^6}$; & P I $= \pm \frac{1}{a^3}$.

(a) Vid. in Tract. de quadr. curv. Newton. tab. curv. ſimplicior. quæ quadrari poſſunt.

Hæc

Hæc autem regulæ hujus formula prior secundum exhibet curvas quæsitas inveniendi modum.

In formulâ posteriori, cum R sit $= \frac{1}{2} a \times \overline{\frac{P\Phi}{a} - \frac{a}{P\Phi}}$, R vel $P\nu$ ejusdem magnitudinis manebit, sed signum mutabit, quando abscissa magnitudinem suam signo mutato retinet, si $P\Phi$ talis sumatur, ut mutando abscissæ signum $\frac{P\Phi}{a}$ convertatur in $\frac{a}{P\Phi}$, & contra ut $\frac{a}{P\Phi}$ convertatur in $\frac{P\Phi}{a}$. Et hæc formula posterior tertium continet problema solvendi modum.

Verbi causâ, sit $P\Phi = a \times \frac{c-z}{c+z}$, quando z est affirmativa, & erit R vel $P\nu$ eodem tempore $= \frac{1}{2} a \times \overline{\frac{c-z}{c+z} - \frac{c+z}{c-z}}$, quando autem z negativa est, fiet $P\Phi = a \times \frac{c+z}{c-z}$, & R vel $Q\rho = \frac{1}{2} a \times \overline{\frac{c+z}{c-z} - \frac{c-z}{c+z}}$. Hinc autem R æqualis erit $\frac{\mp 2acz}{cc-zz}$, & $Rzz \mp 2acz = ccR$; ideoque curva $\varkappa M \mu$ linea tertii ordinis, imo species earum quinquagesima nona; propterea quod æquationis $ccRR + aacc = 0$ radices sunt impossibiles (*a*). Linea autem curva hinc invenienda, si fiat (in *Fig.* 7.) NM vel MO $= c$, logarithmica est, cui recta AB est asymptotos. Cum

(*a*) Vid. Newton. Enumerat. linear. tert. ordin. ad Fig. 63.

enim P Φ ſit $= a \times \frac{c - z}{c + z}$, erit eadem $= \frac{ac}{c + z} - \frac{az}{c + z}$. Si igitur (in *Fig.* 8.) in rectâ lineâ quacunque $\alpha\varepsilon$ ſumatur $\alpha\varkappa =$ O M $= c$, & ei ad perpendiculum erigantur $\alpha\beta$, $\varkappa\mu$ quarum $\varkappa\mu$ ſit $= a$, & ſi aſymptotis $\alpha\varepsilon$, $\alpha\beta$ per punctum μ deſcribatur hyperbola $\zeta\eta$, & ſumptâ $\varkappa\nu =$ M P $= z$, ducatur $\nu\rho$ aſymptoto $\alpha\beta$ parallela; parti $\frac{ac}{c + z}$ ordinatæ P Φ reſpondet area, quæ erit ad aream $\varkappa\mu\rho\nu$ ut ſinus anguli ſub N P I ad radium, & alteri parti $\frac{az}{c + z}$ ejuſdem ordinatæ reſpondet area, quæ erit ad $a \times \varkappa\nu - \varkappa\mu\varrho\nu$ in eâdem ratione (*a*). Unde P I, quæ eſt ad $\frac{\text{M P Φ Ψ}}{a}$ ut radius ad ſinum anguli ſub N M Ψ, erit $= \frac{2\varkappa\mu\rho\nu}{a} - \varkappa\nu$. Si igitur ſumatur O ϛ = O M, & ducatur ϛ M ordinatæ P I retro productæ occurrens in χ, ut ſit P χ = P M $= \varkappa\nu$, erit χ I $= \frac{2\varkappa\mu\rho\nu}{a}$: ideoque linea M I logarithmica, cui A B aſymptotos eſt, & ϛ M ordinatim applicata, efficiens cum aſymptoto A B angulum ſub A ϛ M verſus contingentem æqualem dimidio anguli ſub A O N. *Alter* igitur *hujus lineæ caſus deducitur*, &c. ut ſupra.

Magis generatim, ſi r ordinatam curvæ alicujus denotat, quæ inſtar curvarum $\varkappa$ M μ, & $\varkappa$ n c, m p μ ad abſciſſam N O deſcripta ordinatas habeat æquales, quæ

(*a*) Vid. Newton. de quadr. curv. tab. curv. ſimpl. quæ cum circ. & hyperb. compar. poſſunt, form. prim.

æqualiter diſtant a puncto M, ſed a contrariis partibus abſciſſæ poſitas, poni poteſt ordinata $P\Phi = a \varkappa$

$$\overline{\overline{\overline{b \mp cr + drr \mp er^3 + \&c} \times \overline{f \mp gr + \&c}\,\Big|^{\lambda} \times \overline{h \mp kr + lrr \mp \&c}\,\Big|^{\mu}}\,\Big|^{\nu} - \overline{\overline{b \pm cr + drr \pm er^3 + \&c} \times \overline{f \pm gr + \&c}\,\Big|^{\lambda} \times \overline{h \pm kr + lrr \pm \&c}\,\Big|^{\mu}}\,\Big|^{\nu}}\,\Big|^{\pi}$$

Ex priori hujus regulæ ſecundæ formulâ deducitur quoque theorema, cujus ſupra fit mentio, ad inveniendas curvas tam rationales quam irrationales utile, quod quartus erit modus problema ſolvendi.

Theorema.

Quoniam eſt $P\Phi = \sqrt{aa + RR} + R$, & $R = P\nu$, manifeſtum eſt, ſi $\frac{R}{a}$ vel $\frac{P\nu}{a}$ ſit ut fluxio ordinatæ, quæ abſciſſæ ſuæ ad perpendiculum inſiſtat, alicujus curvæ, erit $\frac{\sqrt{aa + RR}}{a}$, ut ejuſdem curvæ fluxio; curvæ autem hujus ordinata æqualis erit areæ curvæ $\varkappa\mu$ ad a applicatæ, ſi angulus ſub $MP\nu$ rectus ſit, & cum area curvarum (in *Fig*, 2, 4.) $\varkappa M\mu$, & $\varkappa$ n c, m p μ eodem ſigno afficiatur, tam quando abſciſſa eſt affirmativa, quam quando eſt eadem negativa, quoniam areæ ad diverſas abſciſſæ partes in illis diverſis caſibus jacent; & præterea cum eiſdem abſciſſæ magnitudinibus areæ æquales reſpondeant, curvæ, quales problema requirit, inveniri poſſunt curvarum ope, quarum ordinatæ ad eaſdem abſciſſæ magnitudines æquales ſint, & ab eâdem abſciſſæ parte poſitæ, ſi modo ordinatæ inſiſtunt abſciſſæ ad perpendiculum.

Deſcripta ſit ejuſmodi curva n o, quæ tangat abſciſſam in puncto M (ut in *Fig*. 9.) ſi evaneſcat, quando abſciſſa eſt = o, fluens quantitas fluxioni longitudinis curvæ n o reſpondens; aliter, quæ habeat ordinatam primam M m (ut in *Fig*. 10.) æqualem magnitudini

 fluentis

fluentis istius quantitatis, quando abscissa est = o. Erigantur ordinatæ P p, Q q; deinde erit P I curvæ quæsitæ ordinata, quæ ab alterâ parte puncti M jacet, vel = M p + P p, vel = M m p + P p; ordinata autem Q R, quæ ab alterâ parte puncti M cadit, vel = M q — Q q, vel = M m q — Q q.

Observandum autem est hoc theorema aliquando partem duntaxat curvæ quæsitæ describere.

Ex ratione autem, qua hoc theorema investigatur, manifestum est duo crura curvæ hic descriptæ ejusdem lineæ esse partes: nimirum utriusque naturam eâdem æquatione definiri. Hanc autem curvam in situ inverso dispositam se intersecare in angulo æquali angulo sub N O B inde manifestum est, quod rectangulum sub fluxione P I & sub fluxione Q R, ordinatarum scilicet æqualiter a puncto M distantium, æquale est quadrato fluxionis abscissæ: si enim curvæ n o ordinatæ w r, x t applicentur ordinatis Q q, P p proximæ, & P x, Q w sint æquales, & ducantur r s, t v abscissæ N O parallelæ, erunt triangula p t v, q r s rectangula similia & æqualia: *in omni autem triangulo rectangulo quadratum ab alterutro latere angulo recto adjacenti æquale est rectangulo sub summâ alterius lateris angulo recto adjacentis laterisque angulo ei subtendentis, & sub differentiâ eorundem laterum.* Igitur $\overline{tv}^2 = \overline{Px}^2 = \overline{pt+pv} \times \overline{pt-pv} = \overline{pt+pv} \times \overline{qr-qs}$: est autem ultima ratio P x ad p t + p v ea, quam fluxio abscissæ habet ad fluxionem ordinatæ P I; & ratio P x vel Q w ad q r — q s ea, quam fluxio abscissæ habet ad ordinatæ Q R fluxionem. Unde constat propositum. *Regula* igitur *secunda theorema*, &c. ut supra.

Jam si n o sit circuli circumferentia, linea E F cyclois erit, quando angulus sub N O B vel sub N P I rectus est. Porro si curvæ n o longitudo cum rectâ conferri potest, quarum curvarum simplicissima est parabola semicubica,

curva

curva inventa rationalis erit. Speciatim parabola ſemicubica, ſi rite diſponatur, ejus curvæ partem dimidiam exhibebit, quam in exemplum formulæ prioris regulæ ſecundæ delineavimus; ſcilicet (in *Fig.* 6.) crus d e, partemque inferiorem b c cruris a b c. Reliquæ autem illius partes deſcribi poſſunt, ſi retro producatur ordinata I P donec pars producta æqualis ſit M m p — P p, & producatur R Q ab altero abſciſſæ latere, donec pars producta æqualis ſit M m q + Q q

Nunc tranſeundum eſt ad regulam tertiam, quæ etiam curvas geometrice rationales largitur.

Regula Tertia.

Regula hæc tertia duos quoque complectitur problema ſolvendi modos a prioris regulæ formulis propoſitione nonâ tractatus de quadraturâ curvarum *Newtoni* derivatos.

Propoſitione iſtâ ad formulam regulæ præcedentis priorem adhibitâ invenitur area curvæ, cujus abſciſſa eſt z, & ordinata $\sqrt{aa + RR} + R$, æqualis areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt R & ordinata $\frac{\dot{z}}{R}\sqrt{aa + RR}$ $+ \frac{\dot{z}}{R} R$. Hinc autem quinto modo ſolvitur problema.

Verbi causâ, ut exemplum generale, quod antea (a) exhibui, inveſtigetur, poſitis MP $= z$, & Pν $=$ R, ut prius, fiat $\frac{\dot{z}}{R} = R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c + dR^2}$, & erit $z = R^{\frac{m}{n}}$

(a) In Act. Erud. Menſ. April. 1721.

$\overline{\times \frac{n}{m} c + \frac{n}{m+2n} d R^2}$; sint autem m & n numeri impares vel inter se primi vel eorum alter unitas; ut signa abscissæ z & ordinatæ R simul mutentur, sicut in regulâ priori requiritur; jam erit ordinata $\frac{z}{R}\sqrt{aa+RR}$

$$+\frac{z}{R}R = R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c+dR^2} \times \sqrt{aa+RR} + R^{\frac{m}{n}}$$

$\times \overline{c+dR^2}$; area igitur curvæ, cujus abscissa est z & ordinata $\sqrt{aa+RR} + R$, æqualis erit areæ curvæ, cujus abscissa est R & ordinata $R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c+dR^2} \times \sqrt{aa+RR} + R^{\frac{m}{n}} \times \overline{c+dR^2}$, si modo hæc posterior ordinata cum abscissâ suâ angulum contineat æqualem angulo sub N M Ψ; unde hujus posterioris curvæ quadraturâ linea exhibetur problemati satisfaciens. Erit autem hæc linea curva geometrice irrationalis, nisi m & n certos quosdam numeros designant, vel certa quædam sit relatio inter coefficientes c, d; hæ autem conditiones ratione sequenti inveniuntur. Erit (*a*) area curvæ, cujus abscissa R & ordinata $R^{\frac{m}{n}} \times \overline{c+dR^2}$

$$+ R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c+dR^2} \times \sqrt{aa+RR}, \text{ ad } R^{\frac{m+n}{n}}$$

$$\overline{\times \frac{n}{m+n} c + \frac{n}{m+3n} dR^2} + R^{\frac{m}{n}} \times \overline{aa+RR}\big|^{\frac{3}{2}}$$

$$\overline{\times \frac{n}{maa} c + \frac{d - \left|\frac{m+3n}{maa}\times c\right.}{\frac{m+2n}{n} aa} R^2 + \&c.}$$ ut sinus an-

(*a*) Per prop. quint. quadr. curv. Newton.

guli

guli ſub NMΨ ad radium. Hæc autem ſeries terminabitur, & quadraturam finitam dabit, ſi n ſit unitas & m numerus negativus ternario major, vel ſi ultimus terminorum hic ſcriptorum ſit nihilo æqualis, id eſt, ſi ſit $d = \frac{m + 3n}{maa} c$, vel ſi ſit $d = 0$, $n = 1$, & $m = -3$. Et hic quidem ultimus caſus curvam exhibet, quæ theoremate præcedenti a parabolâ ſemicubicâ invenitur.

Magis generatim ponere licet $\frac{\dot{z}}{\dot{R}} = R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c + dR^2 + eR^4 + \&c \ldots + fR^p}$, ubi p numerum quemcunque parem denotat; unde fiat $z = R^{\frac{m}{n}} \times \overline{\frac{n}{m} c + \frac{n}{m+2n} dR^2 + \frac{n}{m+4n} eR^4 \ldots + \frac{n}{m+pn} fR^p}$, & curvæ $\omega\Omega$ ordinata $= R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c + dR^2 + eR^4 \ldots + fR^p} \times \overline{\sqrt{aa+RR}+R}$. Hinc (*a*) ſi n ſit unitas & m numerus negativus numero $p + 1$ major, curva dabitur geometrice rationalis, vel ſi certa quædam relatio ſit inter coefficientes c, d, e, &c. . . . . f, quæ relatio facile invenitur ut antea.

Porro ad alteram regulæ ſecundæ formulam adhibendo propoſitionem nonam memoratam libri de quadraturâ curvarum, ſextus oritur problema ſolvendi modus.

Literâ r denotante ut ſupra, fieri poteſt ordinata $P\Phi = a \times \frac{b + cr + drr + \&c}{b - cr + drr - \&c}$, area curvæ, cujus abſciſſa eſt z & ordinata $P\Phi$, æqualis erit areæ curvæ,

(*a*) Per prop. proxim. citat.

cujus

cujus abscissa est r & ordinata $a \times \frac{\dot{z}}{\dot{r}} \times \frac{b + cr + drr + \&c}{b - cr + drr - \&c}$

Ponatur igitur $\frac{\dot{z}}{\dot{r}} = r^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{b + cr + drr + \&c} \times \overline{b - cr + drr - \&c}|^{p} = r^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{bb + \overline{2bd - cc} \times rr + ddr^{4} + \&c}|^{p}$, & curva, cujus ordinata est r conditionem hic necessariam habebit. Erit enim $z = r^{\frac{m}{n}} \times \overline{bb + \overline{2bd - cc} \times rr + ddr^{4} + \&c}|^{p+1} \times \overline{A + Brr + Cr^{4} + \&c}$, cujus seriei coefficientes A, B, C &c dantur per propositionem quintam Tractatus de Quadraturâ Curvarum. Manifestum autem est nec terminos hujus seriei nec quantitatem $\overline{bb + \overline{2bd - cc} \times rr + ddr^{4} + \&c}|^{p+1}$ signa sua mutare mutatione signi quantitatis r; quantitas autem $r^{\frac{m}{n}}$, si m, n numeri sint impares, signum mutabit, quando ipsa r signum mutat; ideoque ordinata r & abscissa z signa simul mutabunt. Ordinata autem $a \times \frac{\dot{z}}{\dot{r}} \times \frac{b + cr + drr + \&c}{b - cr + drr - \&c} =$ erit $ar^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{bb + \overline{2bd - cc} \times rr + ddr^{4} + \&c}|^{p-1} \times \overline{b + cr + drr + \&c}|^{2}$. Et hinc facile inveniri possunt curvæ rationales.

Pro exemplo simplici ponatur $p = 1 = m = n$, d, &c $= 0$; unde erit $\frac{\dot{z}}{\dot{r}} = bb - ccrr$, & $z = bbr - \frac{1}{3}ccr^{3}$. Ordinata autem curvæ metiendæ $= abb + 2abcr + accrr$; ejusdem igitur area est ad $abbr + abcrr + \frac{1}{3}accr^{3}$ ut sinus anguli sub NM Ψ ad radium; ideoque erit P I $= bbr + bcrr$

$+ \frac{1}{3}$

$+ \frac{1}{3} c c r^3$. Hinc autem invenitur parabolam ſemicubicam problemati ſatisfacere, quam ita deſcribere oportet. Datâ (in *Fig.* 11.) lineâ rectâ A B, & in eâ puncto C, una cum lineâ rectâ C D angulum ſub B C D cum lineâ C B conſtituente æqualem angulo, in quo curva ſe interſecare requiritur. Ducatur ad libitum H G I ad C D parallela, ſumaturque in eâ G H = 2 C G; deinde dividatur angulus ſub A C D in duas partes æquales lineâ rectâ C E, & denique ad diametrum H I & verticem H deſcribatur parabola ſemicubica K H L, quæ tranſeat per punctum C, ita ut C E ordinatim applicetur ad diametrum H I. Hæc parabola ad eandem lineam ſimiliter applicata, ſed ſitu inverſo, ſe interſecabit in angulo æquali angulo ſub B C D.

Si placet curvas hac regulâ inventas theoremate præcedente conſtruere, ex iis, quæ hic tradita ſunt, curva huic negotio apta inveniri poteſt; erit enim curvæ illius ordinata æqualis areæ curvæ $\varkappa \mu$ ad a applicatæ, quando angulus ſub M P ν rectus eſt. Verbi causâ, hujus areæ fluxio, nimirum P $\nu \times \dot{z}$ in exemplo ſecundo prioris partis hujus regulæ erit $= RR \times R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c + dR^2 + eR^4 \ldots\ldots + fR^p} = RR^{\frac{m}{n}} \times \overline{c + dR^2 + eR^4 \ldots\ldots + fR^p}$; ideoque curvæ hic requiſitæ ordinata erit

$$= \frac{1}{a} R^{\frac{m+n}{n}} \times \overline{\frac{n}{m+n} c + \frac{n}{m+3n} dR^2 + \frac{n}{m+5n} eR^4 \ldots\ldots + \frac{n}{m+\overline{p+1} \times n} fR^p}.$$

In exemplo poſterioris partis hujus regulæ erit R

$$\left(= \tfrac{1}{2} a \times \overline{\frac{P\Phi}{a} - \frac{a}{P\Phi}}\right) = \frac{2bcr + 2cdr^3 + \&c}{bb + \overline{2bd - cc} \times rr + ddr^4 + \&c};$$

ideoque $R \times \dot{z} = r r^{\frac{m}{n}} \times \overline{2bc + 2cdr^2 + \&c} \times \overline{bb + \overline{2bd - cc} \times rr + ddr^4 + \&c}\Big|^{p-1}$; hæc igitur eſt fluxio ordinatæ curvæ quæſitæ.

Si ſit $m = 1 = n = p, d, \&c = 0$, erit $R \times \dot{z} = 2bcr\dot{r}$, & ordinata curvæ quæſitæ $= bcrr$; quoniam igitur $z =$ erit $bbr - \frac{1}{3}ccr^3$, erit curva quæſita in hoc caſu parabola divergens cum nodo, quæ definitur hac æquatione $3ezz = y^3 - 2eyy + eey$ (*a*). Et hac curvâ deſcribetur parabola ſemicubica ſupra inventa.

Verbi causâ, ad rectam lineam (in *Fig.* 12.) A B ducatur perpendicularis C D, & ad illam ut axim deſcribatur ejuſmodi parabola divergens F E C E G. Deinde ducatur ad libitum H I angulum quemcunque datum cum rectâ A B conſtituens, & ducatur H K L M ad C D parallela; deinde ſumatur H N = H K + arc. C K, H O = H L + arc. C K L, & ab alterâ parte puncti H, H P = C E M — H M; & curva hac ratione deſcripta parabola ſemicubica erit.

Hinc apparet quomodo curvæ, quarum inveſtigationi regula hæc tertia aptatur, theoremate præcedenti conſtrui poſſunt, poſtquam earum formæ cognoſcuntur, ſed hæ curvarum formæ, a quibus rationales deriventur, regulâ hac tertiâ optime inveniuntur.

Hæ ſunt tres regulæ, quarum ſupra ſit mentio. Ultima ſententia, quæ ſub notis fictis celata fuit, exemplo ſequenti illuſtrari poteſt. Sit y vel $= a + bx + \sqrt{c + 2dx + ex^2}$ vel $= \frac{a + bx + cxx}{d + ex}$, quæ

(*a*) Vid. Enumerat. linear. tert. ord. Fig. 73.

duæ æquationes omnes complectuntur sectiones conicas. Inde vero inveniemus $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$ vel $= \frac{\frac{ec}{d+ex} - dd}{+b\sqrt{c+2dx+exx} \times \overline{c+2dx+exx}}\,\dot{z}$, vel $= \frac{2cdd+2aee-2bde}{\overline{d+ex} \times \overline{bd-ae+2cdx+cexx}}\,z$; quæ æquationes ostendunt in nullâ sectione conicâ, quomodocunque disponatur, quantitatem $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$ conditionem habere, quam hoc problema requirit; ideoque nullam sectionem conicam problemati satisfacere. Quod comprobari etiam potest examinando rectangulum sub fluxionibus primis ordinatarum æqualiter ad diversas partes a principio abscissæ distantium.

Hinc autem cognoscitur nullam lineam curvam geometrice rationalem problema solvere, quæ parabolâ semicubicâ sit simplicior.

Si vero talis inter quantitates a, b, c, d, e relatio statui potuisset ut $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$ conditionem in hoc problemate necessariam obtineret, nempe ut quantitas, quæ in $\dot{z}$ ducitur, eadem esse potuisset, & sub eodem signo, pro eâdem magnitudine tam negativâ quam affirmativâ abscissæ z, quo eveniret ut $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$ foret $= - \frac{\ddot{v}}{\dot{v}}$, si abscissa in oppositas partes a suo principio, æqualibusque momentis fluere ponitur: tum profecto sectio conica hinc determinanda vel problema solveret, vel sectionis

 proble-

problemati ſatisfacientis ordinata ad ordinatam hujus rationem haberet datam.

Jam vero his regulis alias aliquot, quas ab amico accepi, ad problema ſolvendum adjungam.

Regula Quarta.

Iiſdem poſitis ac in regulâ primâ, ſit (in *Fig.* 13.) N O ad A B, C D perpendicularis; ſint P I, Q R ordinatæ æqualiter a puncto M diſtantes, & ſit curva G H per punctum I ducta ſimilis & æqualis curvæ f E F. Ordinatis P I, Q R parallelæ & proximæ ducantur π j l, δ r, & lineæ rectæ I k, R s lineæ N O parallelæ. Angulus ſub s R r = eſt angulo ſub k I l; unde anguli ſub j I k, s R r ſimul ſumpti æquales ſunt angulo dato ſub j I l; & quantum angulus ſub j I k dimidium anguli ſub j I l ſuperat, tantum angulus ſub s R r ab eodem dimidio deficit. Si igitur (in *Fig.* 14.) radio quolibet m n circuli arcus n o deſcribatur, & ſumatur angulus ſub n m p = dimidio anguli dati ſub j I l, angulus ſub n m q = angulo ſub j I k, & angulus ſub n m t = ei ſub s R r, ſectores q m p, p m t erunt æquales. Poſitâ autem I k = R s = 1, erit j k ut tangens anguli ſub j I k vel anguli ſub n m q, & r s erit ut tangens anguli ſub s R r vel anguli ſub n m t; ideoque & fluxio ordinatæ P I erit ut tangens anguli ſub n m q, nimirum ut n v; & fluxio ordinatæ Q R ut tangens anguli ſub n m t, nimirum ut n w; curvæ igitur $\Psi\,\Phi\,\Omega$, cujus areæ ordinata P I proportionalis eſt, ordinata P Φ poteſt eſſe æqualis tangenti n v, & ordinata Q χ ab alterâ parte puncti M = n w. Quoniam autem ſectores p m q, p m t ſunt æquales, conſtitui poteſt ſector p m q æqualis areæ M Π W P curvæ cujuſcunque K L conditionem habentis in regulâ primâ indicatam; & ſector p m t æqualis areæ M Π X Q ejuſdem curvæ. Deni-

que

que ſi ducatur linea recta $\varepsilon n \zeta$ lineæ $M\Psi$ parallela & proxima; cum angulus ſub $\varepsilon M n =$ ſit dimidio anguli ſub j I l, vel angulo ſub n m z, erunt triangula $\varepsilon M n$, n m z ſimilia, & prima ratio $\varepsilon\, n$ ad εM eadem cum ratione z n ad n m; ideoque $\varepsilon n = \frac{M\Psi \zeta \varepsilon}{nm}$, propterea quod $\varepsilon M =$ eſt $\frac{M\Psi \zeta \varepsilon}{M\Psi}$, & $M\Psi = nz$. Hic autem habetur ſeptimus modus, quo problema ſolvi poteſt.

Si loco curvæ KL linea recta ſumatur, quicunque ſit angulus ſub n m z eadem deſcribetur curva; adeo ut hac ratione invenitur una eademque curva, quæ diverſis ſitibus in angulo quocunque dato problema ſolvit. Hæc autem curva a circuli & hyperbolæ quadraturâ dependet; ſi enim ducantur $m\tau$, $n\sigma$ ad m n perpendiculares, quarum $n\sigma =$ ſit m n, & aſymptotis m n, $m\tau$ hyperbola $\omega\,\sigma\,\psi$ deſcribatur, & deinde $q\,\varphi\,\nu$, $p\,\theta\,\varsigma$ ducantur lineis $m\tau$, $n\sigma$ parallelæ; quando M P $=$ eſt arcui circuli p q, erit ordinata $PI = \frac{\theta\varphi\upsilon\varsigma}{mn}$, ſi $mn =$ ſit $2\,M\Pi$ (*a*).

Regula Quinta.

Deſcribatur (in *Fig.* 13.) curva $\varkappa M \mu$ ut in regulâ ſecundâ, & (in *Fig.* 15.) radio $=$ m n deſcribatur ſemicirculus $\alpha\beta\gamma$, cujus centrum δ, ſit autem $\delta\beta$ diametro $\alpha\gamma$ perpendicularis. Sumatur $\delta\varepsilon = P\nu$, ducatur $\varepsilon\zeta$ ad $\delta\beta$ parallela, jungaturque $\delta\zeta$. Deinde ſit curva K L ejus naturæ, ut area $M\Pi W P$ ſemper æqualis ſit ſectori $\beta\delta\zeta$. In circuli arcu (*Fig.* 14.) n o du-

---

(*a*) Vid. Barrov. lect. geometr. pag. 110.

ctis

ctis pν sinu arcus p q, & p θ sinu arcus n p, producatur m p ad z, ducaturque zξ ad pν parallela. Porro dictis m n = m p, a; m θ, b; n z, c; p ν, R; n v, y; erit ut m p : pν : : m z : zξ, sed ut m θ : m n (m p) : : m n : m z ; ex æquo igitur ut m θ (b) : pν(R) : : m n : z ξ : : m v ($\sqrt{aa+yy}$) : z v ($y-c$) unde $by - bc = R\sqrt{aa+yy}$, & denique y = n v = P Φ = $\frac{bbc+aR\sqrt{aa-RR}}{bb-RR}$.

Hinc autem modo octavo solvitur problema.

Regula Sexta.

Per propositionem nonam Tractatus de Quadraturâ Curvarum area curvæ, cujus abscissa est z & ordinata $\frac{bbc+aR\sqrt{aa-RR}}{bb-RR}$, æqualis est areæ curvæ, cujus abscissa est R & ordinata $\frac{\dot{z}}{\dot{R}}\times\frac{bbc+aR\sqrt{aa-RR}}{bb-RR}$

Unde habetur modus nonus problema solvendi.

Literæ m & n eadem denotent, ac in regulâ tertiâ, & fiat $\frac{\dot{z}}{\dot{R}} = R^{\frac{m-n}{n}}\times\overline{bb-RR}|^{p}$, & ordinata $\frac{\dot{z}}{\dot{R}}\times\frac{bbc+aR\sqrt{aa-RR}}{bb-RR}$ fiet $= bbcR^{\frac{m-n}{n}}\times$ $\overline{bb-RR}|^{p-1} + aR^{\frac{m}{n}}\times\overline{bb-RR}|^{p-1}\times\sqrt{aa-RR}$.

Unde si n unitatem denotet, & p numerum quemcunque integrum & affirmativum, curva geometrice rationalis invenietur.

Regula Septima.

Ducatur (in *Fig.* 15.) $\beta\lambda$ ſemicirculum $\alpha\beta\gamma$ contingens in β, & producatur $\varepsilon\zeta$ ad μ, ductâ $\delta\nu\mu$. Sit autem curva (in *Fig.* 13.) K L ejus naturæ, ut area M Π W P = ſit ſectori $\delta\beta\nu$. Dictis igitur m n, a; n ż, c; & tangente arcus p q, R; erit n v = P Φ = $\frac{aac+aaR}{aa-cR}$. Et hic eſt decimus problema ſolvendi modus.

Quando angulus interſectionis rectus eſt, & $c = a$, hæc regula ſub formulâ poſteriori regulæ ſecundæ comprehenditur.

Item ſi loco $\varkappa$ M μ linea recta ſumatur, quicunque ſit interſectionis angulus, caſus ille curvæ logarithmicæ invenietur, quem in regulâ ſecundâ tradidimus.

Regula Octava.

Ut antea, eſt area curvæ, cujus abſciſſa z & ordinata $\frac{aac+aaR}{aa-cR}$, æqualis areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt R & ordinata $\frac{z}{R} \times \frac{aac+aaR}{aa-cR}$. Hic autem eſt undecimus modus problema exequendi.

Literis m, n iiſdem denotantibus, ut antea, ſit $\frac{\dot{z}}{\dot{R}} =$ $R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{a^4 - ccRR}|^p$; & ordinata $\frac{\dot{z}}{\dot{R}} \times \frac{aac+aaR}{aa-cR}$ fiet $= R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{a^4 c + \overline{a^4 + a^2 cc} \times R + aacRR}$ $\times a^4 -$

$\overline{\times a^4 - ccRR}|^{p-1}$: quæ formula curvas geometrice rationales facile præbet.

Si ſit $m = 1 = n = p$; eadem parabola ſemicubica atque ex regulâ tertiâ invenietur.

Regula nona.

Si (in *Fig.* 16.) N O ad lineas A B, C D perpendicularis ſit, & ducatur curva K L, cujus ordinatæ P W, Q X, quæ æqualiter a puncto M diſtant, æquales ſint, & ab eâdem abſciſſæ parte poſitæ; radio ordinatæ P W æquali deſcribatur circuli ſegmentum a b c, quæ angulum comprehendat angulo æqualem, in quo curva ſe ipſam ſecare requiritur. Ducatur autem & alia curva κ M μ cujus ordinatæ Pν, Qρ æqualiter a puncto M diſtantes ſint æquales & a contrariis partibus abſciſſæ N O poſitæ. Deinde ſumptâ M f = Pν ductâque f h lineæ N O ad perpendiculum, junctâque c h, manifeſtum eſt, ſi curva quæſita E F ejus ſit naturæ, ut contingens in puncto I ſemper ſit parallela lineæ c h, propoſito ſatisfaciet. Nam cum ſit W P = Q X, idem circuli ſegmentum ordinatis P W, Q X convenit; adeo ut ſi ſumatur M g = Q ρ, ducatur g k ad N O perpendicularis, & jungatur c k, linea recta contingens curvam quæſitam E F in puncto R parallela erit lineæ c k. Quoniam igitur Q ρ = eſt Pν, ideoque M g = M f in ſitu hujus curvæ E F inverſo, & quando punctum R in punctum I cadit, contingens in puncto R lineæ puncta a, h conjungenti parallela erit, & cum contingente in puncto I angulum conſtituet æqualem ei ſub a h c, nimirum angulo in ſegmento a b c comprehenſo. Invenitur igitur hujuſmodi curva, ſi fiat ut $\dot{y} : \dot{z}$: : f h : f c. Quamobrem ſi pro P W ponatur m ; pro a M

 = M c

$=$ M c ponatur n; pro intervallo inter punctum M & centrum ſegmenti ponatur p; & pro P $\nu =$ M f, q; habebimus $\dot{y} : \dot{z} :: \sqrt{mm - qq} \pm p : n + q$, & $\dot{y} = \frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q} \dot{z}$. Dantur autem rationes inter m, n, p ob datum ſegmenti a b c angulum, & invenietur y vel P I metiendo curvam, cujus abſciſſa eſt z & ordinata $\frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q}$. Hic autem exhibetur duodecimus modus problema tractandi.

Si angulus ſub a h c ſit rectus, erit $p = 0$, $n = m$, & ordinata curvæ metiendæ $\sqrt{\frac{m - q}{m + q}}$. Quam profecto ordinatam problemati ſatisfacere, intelligi quoque poteſt ex poſteriori regulæ ſecundæ formulâ.

Si loco linearum curvarum K L, $\varkappa$ M μ rectæ ſumantur, quando angulus ſub a h c rectus eſt, erit curva E F cyclois; quæ facile determinatur formâ undecimâ tabulæ curvarum ſimpliciorum, quæ cum circulo & hyperbolâ comparari poſſunt in Tractatu de Quadraturâ Curvarum *Newtoni*.

Regula Decima.

Porro area curvæ, cujus abſciſſa eſt z & ordinata $\frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q}$, æqualis eſt tum areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt m & ordinata $\frac{\dot{z}}{\dot{m}} \times \frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q}$; tum areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt q & ordinata $\frac{\dot{z}}{\dot{q}} \times \frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q}$. Unde habentur duo alii mo-

di, quibus problema ſolvi poteſt; quorum poſteriori, ratione ſequenti, curvæ geometrice rationales inveniri poſſunt.

Sint δ, ε numeri impares, n numerus par, & ponatur $\frac{\dot{z}}{\dot{q}} = q^{\frac{\delta - \varepsilon}{\varepsilon}} \times \overline{n^n - q^n}$, item $m = 1 + \frac{1}{4} q q$. Unde erit $z =$ areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt q & ordinata $q^{\frac{\delta - \varepsilon}{\varepsilon}} \times \overline{n^n - q^n}$, & ordinata $\frac{\dot{z}}{\dot{q}} \times \frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q}$ fiet $= \overline{n^{n-1} - n^{n-2} q + n^{n-3} q q + \&c. \ldots - q^{n-1}} \times \overline{1 - \frac{1}{4} q q \pm p}$.

His quatuordecim diverſis modis generalibus amicus meus problematis ſolutionem abſolvit. Demonſtrationes autem illius ex compoſitione uſus in hoc problemate curvarum Geometris notarum ſic ſe habent.

De Caſu primo Linearum logarithmicarum.

Sit (in *Fig.* 17.) A B linea logarithmica aſymptoton habens C D; eique ordinatim applicetur E F, quæ ſit ſubtangenti logarithmicæ æqualis. Ad lineam rectam E F & ad quodcunque in eâ punctum I conſtituatur alia linea logarithmica G H I priori ſimilis & æqualis, ſed ſitu inverſo diſpoſita. Deinde ſi contingentes H L, H M ducantur, dico angulum ſub L H M angulo ſub C E F eſſe æqualem.

Ordinatim applicetur H N, fiat E O = E N, ordinatim applicetur O P, & ducatur contingens P Q. Puncta P & H æqualiter diſtant a rectâ E I, unde punctum P in curvâ A B puncto H in curvâ G I reſpondet, & angulus ſub O P Q = eſt angulo ſub N H M, propterea quod curvæ A B, G I ſimiles ſunt & æquales. Quoniam vero curva A B eſt logarithmica

mica

mica & E N, E O æquales, erit N H x O P = E F q. Eſt autem E F = N L = O Q, unde ut N H : E F (N L) : : E F (O Q) : O P. Cum igitur anguli ſub H N L, Q O P ſint æquales, triangula H N L, Q O P ſunt ſimilia, & angulus ſub Q P O, qui æqualis eſt angulo ſub N H M, æqualis quoque erit angulo ſub N L H. Unde anguli ſub N H M & ſub N L H æquales erunt, & angulus ſub L H M angulo ſub C N H ſive angulo ſub C E F æqualis. Q. E. D.

De Caſu altero Linearum Logarithmicarum.

Sint (in *Fig.* 18.) A B, C D duæ lineæ rectæ parallelæ, intra quas quælibet alia linea recta E F ducatur. Ad aſymptoton A B deſcribatur linea logarithmica G H, cujus ſubtangens ſit æqualis lineæ E F, & ordinatim applicatæ comprehendant cum aſymptoto angulos verſus contingentes æquales parti dimidiæ anguli ſub A E F. Quibus poſitis, ſi ad aſymptoton C D alia deſcribatur linea logarithmica I L M priori ſimilis & æqualis, & ſi ducantur contingentes L N, L O, dico angulum ſub O L N angulo ſub B E F eſſe æqualem.

Ducatur N P, ut angulus ſub A N P angulo ſub A E F ſit æqualis, & erit N P = E F. Sumatur N Q lineæ E F ſive ſubtangenti lineæ logarithmicæ æqualis, jungaturque Q L. Quoniam igitur Q L punctum Q conjungit cum puncto contactus L, Q L ordinatim ad aſymptoton A B applicabitur, ideoque angulus ſub L Q N verſus contingentem L N æqualis erit parti dimidiæ anguli ſub A E F vel anguli ſub A N P; eſt autem N P = E F = N Q, quoniam igitur N P, N Q ſunt æquales, & angulus ſub L Q N æqualis dimidio anguli ſub A N P, recta Q L producta tranſibit per P efficiens triangulum P N Q iſoſceles. Eâdem ratione ſi ducatur O S, ut angulus ſub C O S æqualis ſit angulo

 ſub

ſub AEF erit OS = EF; ſi vero ſumatur OR = EF, ducaturque RL, ordinatim ea applicabitur ad aſymptoton CD, & producta tranſibit per S, propterea quod linea IM ſimilis eſt & æqualis lineæ GH. Erit autem angulus ſub PRL (= angulo ſub LSQ) = angulo ſub LQS = angulo ſub NPQ. Unde erit angulus ſub LSQ = angulo ſub NPQ, & triangula SLQ, PNQ ſimilia ſunt, angulusque ſub SLQ = angulo ſub PNQ = angulo ſub BEF. Eſt autem & LS = LQ, OS = NQ, item angulus ſub OSL (= angulo ſub ORS) = angulo ſub NQL. Triangula igitur OSL, NQL æqualia ſunt, habentia baſes OL, NL æquales, & angulos ſub NLQ, OLS, etiam æquales: auferatur communis angulus ſub NLS, & relinquetur angulus ſub OLN = angulo ſub SLQ = angulo ſub BEF. Q. E. D.

De Cycloide.

Sint (in *Fig.* 19.) AB, CD duæ rectæ lineæ parallelæ, quas EF ad perpendiculum ſecet. In diametrum EF deſcribatur ſemicirculus EGF, & eo ſemicirculo deſcribatur ſemicyclois FH. Jam ſi alia ſemicyclois ILQ priori ſimilis & æqualis ſed ſitu inverſo intra parallelas deſcribatur, & ſi contingentes LM, LN ducantur, dico angulum ſub MLN rectum eſſe.

Sit IOP ſemicirculus, quo deſcribitur ſemicyclois IQ, ejus diameter IP; ducatur LGO, lineis AB, CD parallela, & jungantur FG, GE, IO. Erit deinde contingens LM parallela rectæ FG, & contingens LN parallela rectæ IO, quæ parallela eſt rectæ EG. Angulus igitur ſub MLN = eſt angulo ſub FGE recto, ideoque angulus ſub MLN rectus eſt. Q. E. D.

De

De Parabolâ Semicubicâ.

Si (in *Fig.* 20.) rectam lineam AB alia recta linea CD interſecat in puncto D cum lineâ AB angulum quemcunque conſtituens; & ſi ſumatur DE $= \frac{1}{2}$ DC; deinde ducatur EF, ut DF ſit = DE; & denique diametro CF & vertice C deſcribatur parabola ſemicubica GCH, quæ tranſeat per punctum E, habeatque ordinatim applicatas ad diametrum CF lineæ FE parallelas: his poſitis, ſi parabola hæc ad lineam AB in ſitu inverſo deſcripta ſit, ut eandem in ſitu jam dicto deſcriptam interſecet, & contingentes ad punctum interſectionis ducantur, illæ contingentes ſe interſecabunt in angulo æquali angulo ſub CDB.

Sumatur in parabolâ GCH punctum quodvis I, ducatur ILC, & ſumptâ EM = EL ducatur MNC. Deinde ordinatim applicentur OIP, NQR, ducaturque CEV, item EX diametro CO parallela. His poſitis erit VX : XE :: EF : FC, & XE : XP :: DF : EF. Unde ex æquo ut VX : XP :: DF : FC, dividendoque ut VX : VP :: DF : DC. Quoniam igitur eſt DF = DE = $\frac{1}{2}$ DC, eſt etiam VX = $\frac{1}{2}$ VP. Porro ut IO*q* : EF*q* :: CO*c* : CF*c* :: VO*c* : EF*c*. Quatuor igitur ratione continuatâ proportionalium eſt VO ſecunda, quarum IO eſt prima & EF ultima. Eſt autem & IO : OV :: LF : EF. Ideoque ſunt IO, OV, FL, FE quatuor ratione continuatâ proportionales; unde ut VO : LF :: LF : EF :: VO — LF : LE, componendoque ut LF + EF : EF :: VO — EF (= VX) : LE. Demonſtratum autem fuit VX æqualem eſſe dimidio lineæ VP. Ut igitur 2 LF + 2 EF : EF :: VP : LE :: 2 LFE + 2 EF*q* : EF*q*. Jam vero ut IO : LF (:: IV : LE) :: LF*q* (2 LFE + LE*q* — EF*q*) : EF*q*, propterea quod lineæ IO,

VO

V O, L F, E F sunt quatuor ratione continuatâ proportionales; quoniam igitur ut V P : L E : : 2 L F E + 2 E F q : E F q, erit ut P I : L E : : 3 E F q — L E q : E F q. Eodem modo demonstratur ut N R : E M : : 3 E F q — E M q : E F q. Cum igitur E M = sit E L, erit N R = P I, sunt autem parallelæ, ideoque puncta N, I æqualiter distant a linea A B. Si igitur parabola semicubica G C H in situ inverso ad lineam A B describatur, punctum N incidere potest in punctum I. Parabolæ huic detur ille situs inversus *h c g*, & ducantur contingentes I Γ S, E W, Δ N T, *t* I δ; item lineæ W L Y, W Z M. Erit ex naturâ parabolæ hujus O S = $\frac{2}{3}$ O C, F W = $\frac{2}{3}$ F C, & Q T = $\frac{2}{3}$ Q C. Est autem & F D = $\frac{1}{3}$ F C; unde F D, D E, & D W sunt æquales, & angulus sub F E W rectus: &, cum E L sit = E M, erunt & anguli sub E W L, E W M æquales. Quoniam autem L M F lineis I O, N Q parallela est, & lineæ O C, F C Q C similiter dividuntur in punctis S, W, T, erit W L Y contingenti I S Γ parallela, & W Z M contingenti Δ N T. Est igitur angulus sub W Y D = angulo sub I Γ *t*, & angulus sub W Z D = angulo sub N Δ D = angulo sub I *t* Γ. Porro cum anguli sub E W L, E W M sint æquales, & anguli sub D E W, D W E etiam æquales propter linearum D W, D E æqualitatem, erit angulus sub Y W D = angulo sub W Z D. Ideoque angulus sub C D B, qui æqualis est summæ angulorum sub W Y D & sub Y W D, æqualis erit summæ angulorum sub I Γ *t*, & sub I *t* Γ, nimirum angulo sub Γ I δ æqualis. Q. E. D.

Lond. Aug. 27. 1722.

VIII. *An*